P

USP FUVEST FUNDAÇÃO UNIVERSITÁRIA PARA O VESTIBULAR

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO • ESCOLA POLITÉCNICA

EXAME DE TRANSFERÊNCIA EXTERNA 2024/2025

PROVA DA SEGUNDA ETAPA

Instruções

1. Só abra este caderno quando o fiscal autorizar.
2. Verifique se o seu nome está correto na capa deste caderno.
3. Durante a prova, são **vedadas** a comunicação entre candidatos e a utilização de qualquer material de consulta, eletrônico ou impresso, e de aparelhos de telecomunicação.
4. Duração da prova: **3 horas**. Cabe ao candidato controlar o tempo a partir do relógio disponibilizado na sala de provas. O(A) candidato(a) poderá retirar-se da sala definitivamente somente após decorridos **90 minutos** de prova. Não haverá tempo adicional para transcrição de respostas.
5. Lembre-se de que a FUVEST se reserva o direito de efetuar procedimentos adicionais de identificação e controle do processo, visando a garantir a plena integridade do exame. Assim, durante a realização da prova, poderá ser coletada por um fiscal uma foto do(a) candidato(a) para fins de reconhecimento facial, para uso exclusivo da USP e da FUVEST. A imagem não será divulgada nem utilizada para quaisquer outras finalidades, nos termos da lei.
6. Após a autorização do fiscal da sala, verifique se o caderno está completo. Ele deve conter **9** questões discursivas: **3** questões de Álgebra Linear; **3** questões de Desenho; e **3** questões de Mecânica Geral. Informe ao fiscal de sala eventuais divergências.
7. Os espaços em branco nas páginas dos enunciados podem ser utilizados para rascunho. O que estiver escrito nesses espaços não será considerado na correção.
8. A resposta de cada questão deverá ser escrita exclusivamente no quadro a ela destinado, utilizando caneta esferográfica de tinta **azul** ou **preta**. Nas questões que exigem cálculo, é indispensável indicar a resolução na folha de respostas.
9. Ao final da prova, é **obrigatória** a devolução deste caderno de questões.

Declaração

Declaro que li e estou ciente das informações que constam na capa desta prova, bem como dos avisos que foram transmitidos pelo fiscal de sala.

____

ASSINATURA

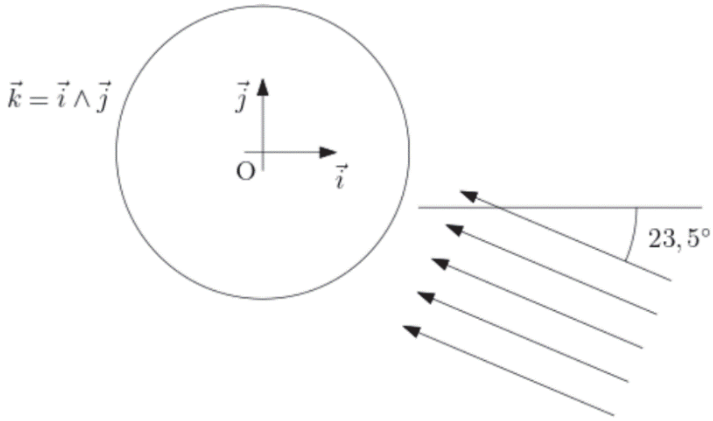
O(a) candidato(a) que não assinar a capa da prova será considerado(a) ausente da prova.

Questão 01

O planeta Terra, aqui considerado como uma esfera, gira em torno de seu próprio eixo com um período de um dia e completa um ciclo ao redor do Sol em um ano. O eixo de rotação da Terra em torno de si mesma está inclinado em relação ao plano que contém a trajetória da Terra em torno do Sol. O ângulo de inclinação é igual à latitude do Trópico de Capricórnio. No dia mais longo do ano em um ponto sobre essa linha imaginária, a sombra de uma haste vertical atinge o comprimento nulo (quando o Sol está a pino), o que não acontece nas demais épocas do ano.

Assuma que, devido à grande distância da Terra ao Sol, relativamente ao diâmetro de Terra, os raios solares são paralelos. Assuma também que o início e o fim de um dia em um ponto P da Terra são marcados pela condição de que os raios solares são ortogonais à normal à superfície da Terra em P.

Considere a figura a seguir em que é esquematizada a situação da Terra com relação à direção dos raios solares. Adote o sistema de coordenadas $S = \{O, \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}\}$ atrelado à Terra como indicado na figura. O ponto O está no centro do planeta, os vetores $\vec{\imath}$ e $\vec{k}$ têm a mesma velocidade angular que a Terra, e $\vec{\jmath}$ corresponde ao eixo de rotação dela. A base $B = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ é ortonormal.



Esquema da posição da Terra em relação aos raios solares.

A latitude do trópico de Capricórnio é aproximadamente 23,5 graus. Para esta questão, assuma a aproximação que sen (23,5) = 0,4. Faça suas contas com apenas uma casa decimal.

Para os itens seguintes, assuma que a Terra está em uma posição em relação ao Sol tal que esse dia é o mais longo do ano para uma cidade sobre o trópico de Capricórnio.

a) Forneça as coordenadas de um vetor $\vec{v}$ de comprimento unitário que tem a mesma direção dos raios solares quando o Sol está a pino em uma localidade sobre o trópico de Capricórnio usando a base atrelada à Terra.

b) Forneça a representação matricial $[T]$ do operador linear T que realiza a mudança de coordenadas de um vetor fixo qualquer do espaço $\mathbb{R}^3$ em relação à B que está atrelada à Terra, quando esta executa uma rotação em torno de seu eixo de θ radianos a partir da posição da Terra quando o Sol está a pino. A representação matricial deve usar a base B atrelada à Terra.

c) Mostre que, em uma cidade sobre o Equador, que tem latitude zero, o tempo entre o nascer e o pôr do Sol é igual a metade de um dia.

d) Usando as aproximações $cos\, \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$ e $sen\, \alpha \approx \alpha$ quando α, dado em radianos, é pequeno, estime quantos minutos o dia é mais longo em uma cidade sobre o trópico de Capricórnio do que em uma cidade sobre o Equador no dia mais longo do ano. Assuma que um dia tem 24×60 minutos.

Resposta da questão 01

a) Por inspeção, as coordenadas de um vetor $\vec{v}$ que satisfaz as condições da questão são

$$\vec{v} = (\cos(23{,}5\,\text{deg}), -\text{sen}(23{,}5\,\text{deg}), 0).$$

Outra possibilidade é o inverso do vetor acima.

b) Uma transformação linear fica completamente determinada quando se conhece a sua ação sobre os vetores da base. Assim, aplicando a transformação pedida aos vetores que tem coordenadas $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ antes da rotação sucessivamente, obtemos a matriz de transformação pedida.

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

c) Fixe um ponto C sobre o Equador quando o Sol está em seu ponto mais alto no céu. O vetor unitário normal à superfície da Terra no ponto C tem sempre coordenadas $(1,0,0)$ na base atrelada à Terra. Aplicamos T em $\vec{v}$ do item anterior para obter suas novas coordenadas quando a Terra executa uma rotação de θ radianos em torno de seu eixo $\vec{j}$. O resultado são as coordenadas $(cos\theta\cos(23{,}5), -sin(23{,}5), \cos(23{,}5)\text{sen}\theta)$.

Os limites do dia, quando o Sol ainda está sobre o horizonte, são dados pela condição de ortogonalidade dos raios solares com relação à normal à superfície da Terra no ponto C. Essa condição se traduz no produto escalar $(cos\theta\cos(23{,}5), -sin(23{,}5), \cos(23{,}5)\text{sen}\theta) \cdot (1,0,0) = 0$, o que implica $\theta = \pm\pi/2$. Isto é, a Terra deve realizar um movimento de rotação de π radianos entre o nascer e o pôr do Sol. Isso equivale à duração de metade de um dia.

d) Fixe um ponto P sobre o trópico de Capricórnio quando o Sol está em seu ponto mais alto no céu. O vetor unitário normal à superfície da Terra no ponto P tem sempre coordenadas $(\cos(23{,}5), -\text{sen}(23{,}5), 0)$. Aplicamos T em $\vec{v}$ descrito nos itens anteriores para obter suas novas coordenadas quando a Terra executa uma rotação de θ radianos em torno de seu eixo $\vec{j}$. O resultado são as coordenadas $(cos\theta\cos(23{,}5), -sin(23{,}5), \cos(23{,}5)\text{sen}\theta)$.

Os limites do dia, quando o Sol ainda está sobre o horizonte, são dados pela condição de ortogonalidade dos raios solares com relação à normal à superfície da Terra no ponto P. Essa condição se traduz no produto escalar $(cos\theta\cos(23{,}5), -sin(23{,}5), \cos(23{,}5)\text{sen}\theta)\cdot(\cos(23{,}5), -\text{sen}(23{,}5), 0) = 0$, que fornece

$$cos\theta(\cos(23{,}5))^2 + (sin(23{,}5))^2) = 0,$$

Isto é, usando as aproximações numéricas dadas no enunciado, temos $cos\theta = -1/6$. Fazendo $\theta = \pi/2 + \varphi$, em que φ é a duração do "excesso de metade de um dia", usando a relação trigonométrica $\cos(\pi/2+\varphi) = -\text{sen}\varphi$ e as aproximações para θ pequeno, obtemos que $\varphi \approx 1/6$ radianos. Usando uma regra de três, vemos que φ corresponde a 38,2 minutos, ou seja o dia mais longo tem $2 \times 38{,}2$ minutos a mais que 12 horas.

Questão 02

Suponha que $[A]$ seja uma matriz quadrada simétrica real de ordem 2 que satisfaz a equação

$$[A]^2 + a_1[A] + a_2[I] = 0,$$

com $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $a_2 \neq 0$.

a) Mostre que $[A]$ é inversível.
b) Determine $[A]^{-1}$ em função de $[A]$.

Resposta da questão 02

a) Para que $[A]$ seja inversível, é necessário e suficiente que $\det[A] \neq 0$. Como o determinante de $[A]$ é igual ao produto de seus autovalores, para que $[A]$ seja inversível é necessário e suficiente que nenhum autovalor seja nulo.

Como $[A]$ é quadrada simétrica e real, ela é diagonalizável. Assim, existe uma matriz $[Q]$ ortogonal de ordem 2 tal que $[Q][A][Q]^t$ é uma matriz diagonal $[\Lambda]$, em que os elementos da diagonal são seus autovalores.

Pré e pós multiplicando a equação

$$[A]^2 + a_1[A] + a_2[I] = 0,$$

por $[Q]^t$ e $[Q]$, obtemos

$$[\Lambda]^2 + a_1[\Lambda] + a_2[\Lambda] = 0.$$

Isso significa que os autovalores satisfazem a equação

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2\lambda = 0.$$

Como $a_2 \neq 0$ é igual ao produto das soluções da equação acima. Daí nenhum autovalor é nulo. Então, o determinante de $[A]$ não é nulo. A conclusão é que $[A]$ possui inversa.

b) Basta multiplicar a equação

$$[A]^2 + a_1[A] + a_2[I] = 0$$

por $[A]^{-1}$, que existe. Daí obtemos

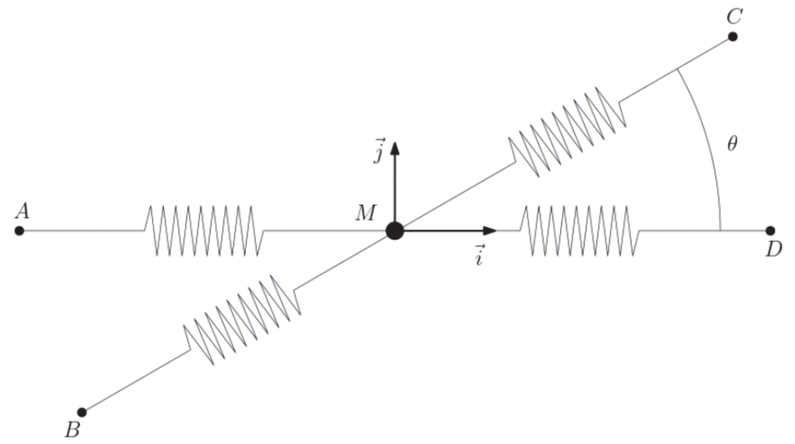
$$[A] + a_1[I] + a_2[A]^{-1} = 0,$$

e então,

$$[A]^{-1} = -\frac{1}{a_2}([A] + a_1[I]).$$

Questão 03

Considere o sistema elástico esquematizado na figura a seguir.



Sistema elástico.

Ele é composto por quatro molas de constante elástica $k > 0$ que se ligam no ponto central, onde se localiza uma massa pontual $M > 0$. Os pontos A, B, C e D nas extremidades das molas são fixos. Usando o sistema de coordenadas indicado na figura, que não se move com o movimento do sistema, obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias, após a aplicação da segunda lei de Newton, para pequenos deslocamentos da massa M:

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k(1+(\cos\theta)^2)x - k(\operatorname{sen}\theta\cos\theta)y & (1) \\ M\dfrac{d^2y}{dt^2} = -k(\operatorname{sen}\theta\cos\theta)x - k(\operatorname{sen}\theta)^2)y. & (2) \end{cases}$$

As coordenadas x e y são medidas ao longo de $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$, respectivamente.

Responda aos seguintes itens, adotando $\theta = \pi/4$ radianos.

a) Assumindo espaço vetorial real, qual é a dimensão do espaço solução do sistema de equações apresentado?
b) Assumindo espaço vetorial real, forneça a solução geral do sistema de equações acima, obtendo todos os auto-pares do problema.

Resposta da questão 03

a) A dimensão do espaço solução é 2, pois trata-se de um sistema de equações de ordem 2.

b) Pode-se escrever a equação dada em forma matricial.

$$M\frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -k\begin{bmatrix} (1+(\cos\theta)^2) & (\mathrm{sen}\theta\cos\theta) \\ (\mathrm{sen}\theta\cos\theta) & (\mathrm{sen}\theta)^2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Supomos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}_S \mathrm{sen}(\omega t).$$

Fazendo uma simples substituição, obtemos

$$\frac{M\omega^2}{k}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} (1+(\cos\theta)^2) & (\mathrm{sen}\theta\cos\theta) \\ (\mathrm{sen}\theta\cos\theta) & (\mathrm{sen}\theta)^2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}_S. \tag{3}$$

Buscamos os autovalores do problema ao buscar valores de $\lambda = \frac{M\omega^2}{k}$ tais que o sistema acima tenha soluções não triviais. Usamos $\theta = \frac{\pi}{4}$ como especificado no enunciado.

Essa condição implica em

$$\det\begin{bmatrix} \frac{3}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

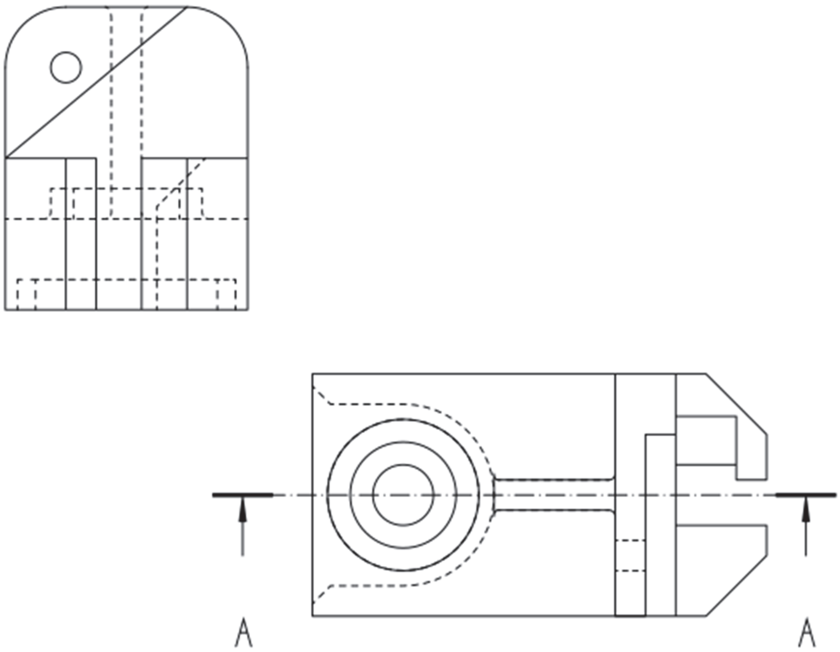
Essa equação possui duas raízes, que são $\lambda_1 = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\lambda_1 = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Substituindo sucessivamente λ_1 e λ_2 na equação (3), obtemos os autovetores $[x_0\ y_0]_S = [1\ (\sqrt{2}-1)]$ e $[x_0\ y_0]_C = [1\ \ -(1+\sqrt{2})]$.

A solução geral pedida tem a forma

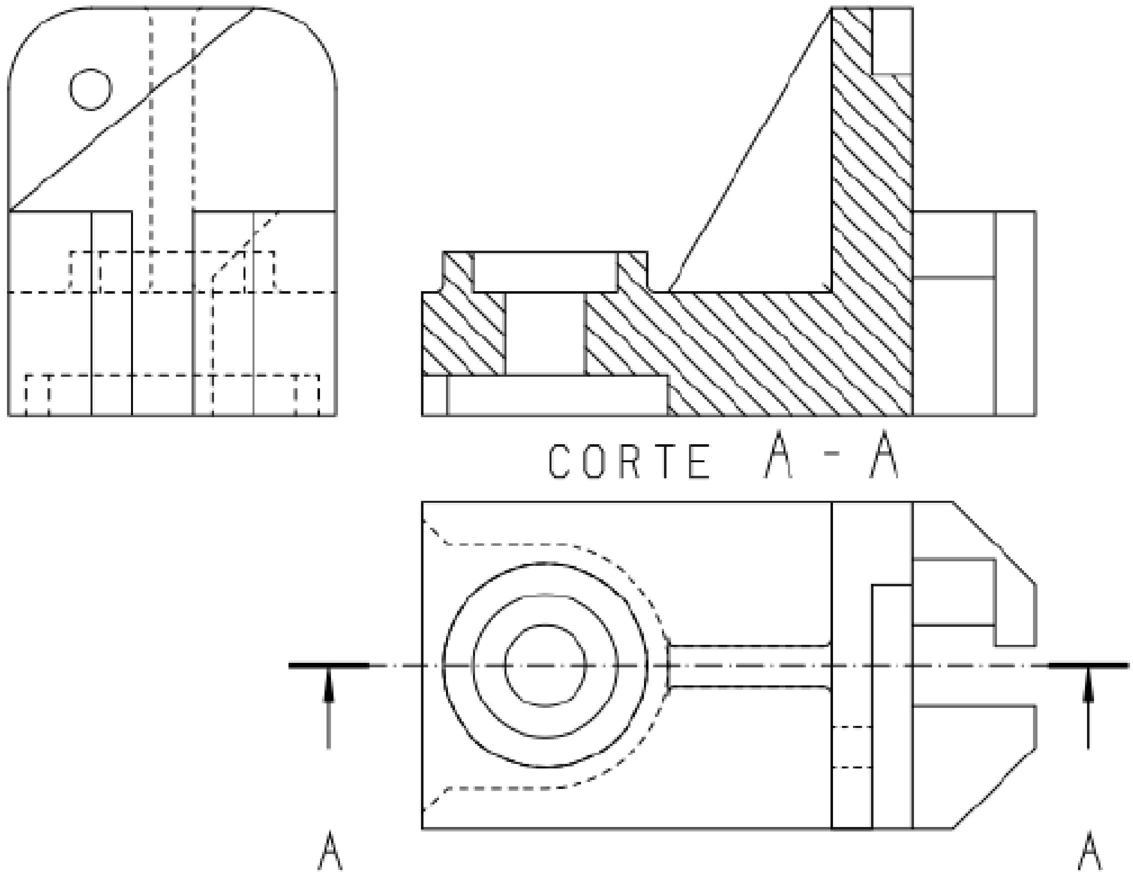
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix} 1 \\ (\sqrt{2}-1) \end{bmatrix}\mathrm{sen}(\sqrt{\frac{k\lambda_1}{M}}) + C_2\begin{bmatrix} 1 \\ -(\sqrt{2}+1) \end{bmatrix}\cos(\sqrt{\frac{k\lambda_2}{M}})$$

Questão 04

Dadas as vistas superior e lateral direita de uma peça representadas no primeiro diedro, desenhe a vista frontal em corte do plano AA.



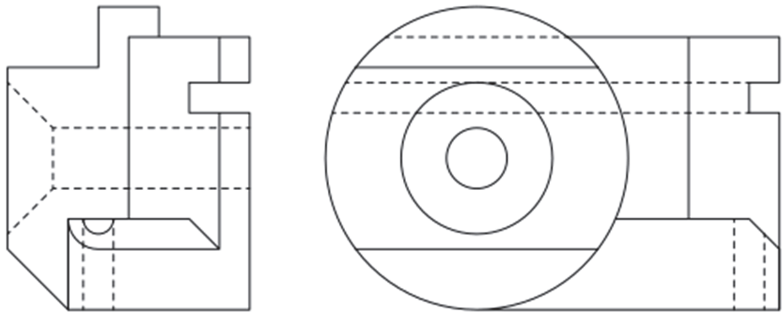
Resposta da questão 04



Questão 05

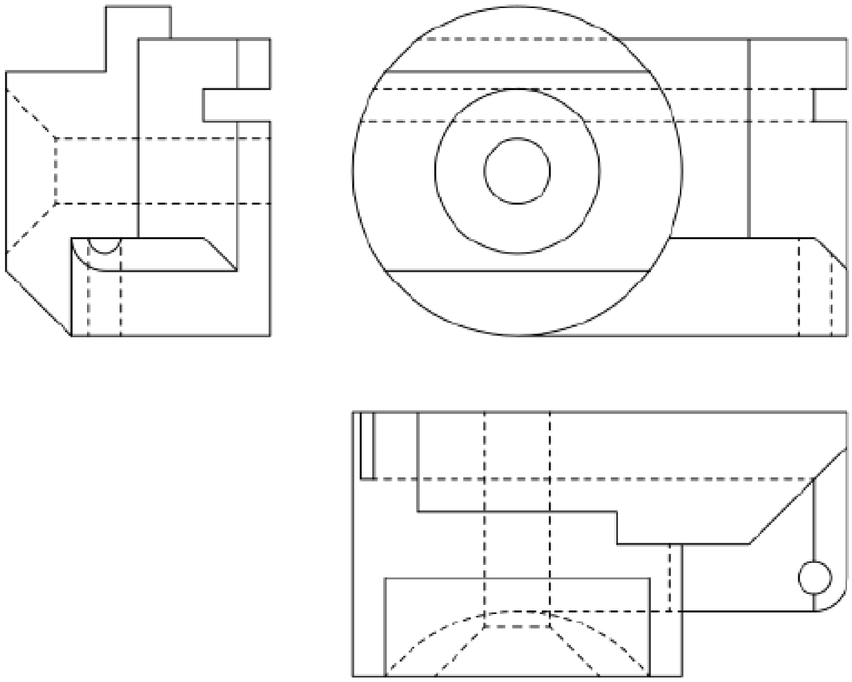
Considere as vistas frontal e lateral direita de uma peça representadas no primeiro diedro:

a) Complete o conjunto de vistas, desenhando a vista superior na sua posição correta.
b) Qual a melhor técnica de modelamento de sólido para criar o furo escareado da peça?



Resposta da questão 05

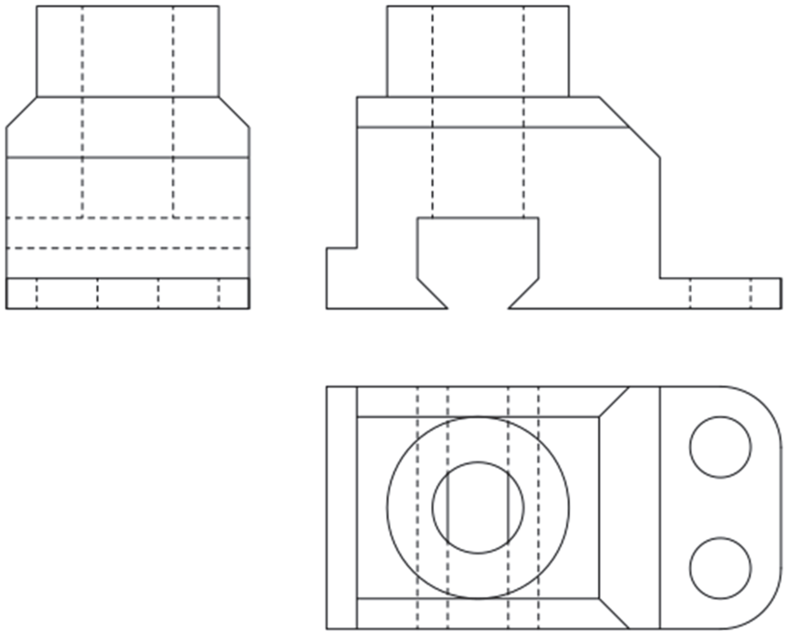
a)



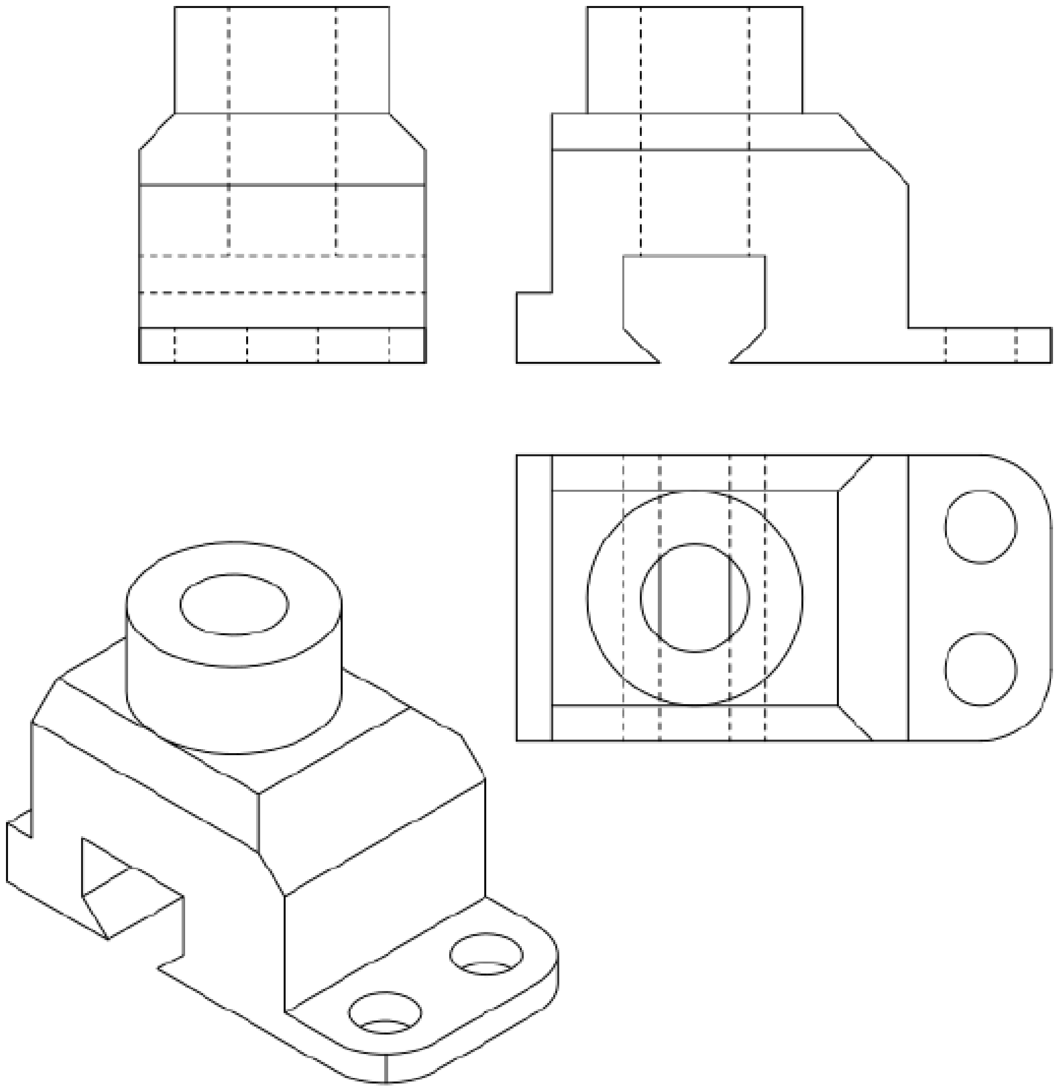
b) *Features* hole (furo)

Questão 06

A figura a seguir mostra as vistas de uma peça geradas no primeiro diedro, em escala natural (1:1). Desenhe a perspectiva isométrica simplificada da peça, mostrando as faces frontal, superior e lateral direita, em escala natural.

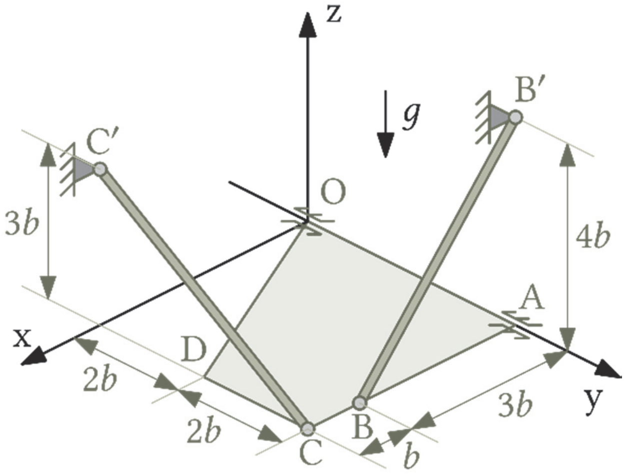


Resposta da questão 06



Questão 07

A figura a seguir ilustra uma estrutura constituída por uma placa esbelta e homogênea OACD, de peso P, e por duas barras esbeltas e homogêneas BB’ e CC’, de peso desprezível. Os vínculos em O e A são anéis ideais. As barras, por sua vez, possuem articulações em suas extremidades. O polígono OACD é um trapézio retângulo; os pontos A, C e D estão contidos no plano Oxy; os pontos B’ e C’ estão contidos nos planos Oyz e Oxz, respectivamente; e os segmentos BB’ e CC’ são reversos e ortogonais aos eixos Oy e Ox, respectivamente.



Considerando a estrutura apresentada, determine

a) as coordenadas x_G e y_G do centro de massa G da placa.

b) as magnitudes dos esforços atuantes nas barras BB’ e CC’.

Resposta da questão 07

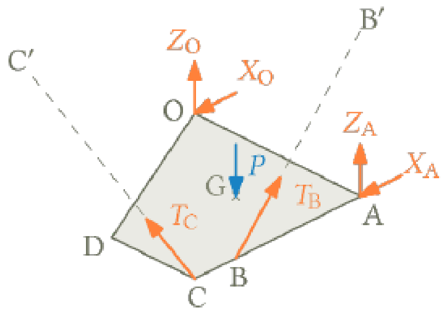
a) A placa pode ser concebida como a concepção de uma placa triangular de centro de massa $\left(\frac{4}{3}b, \frac{4}{3}b, 0\right)$ e área $\frac{1}{2}(2b)(4b) = 4b^2$, e uma placa retangular de centro de massa $(2b, 3b, 0)$ e área $(2b)(4b) = 8b^2$. Assim:

$$x_G = \frac{4b^2\left(\frac{4}{3}b\right) + 8b^2(2b)}{4b^2 + 8b^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_G = \frac{16}{9}b} \qquad y_G = \frac{4b^2\left(\frac{4}{3}b\right) + 8b^2(3b)}{4b^2 + 8b^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_G = \frac{22}{9}b}$$

b) A figura ao lado indica o diagrama de corpo livre da placa. Das condições necessárias para o equilíbrio, temos:

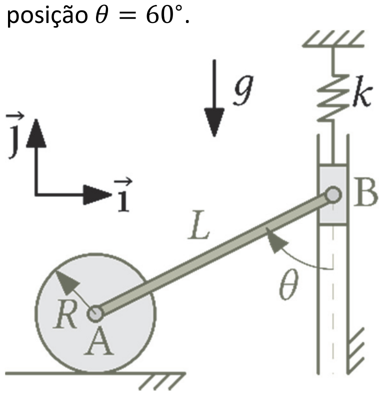
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{4}{5}T_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_C = 0}$$

$$\sum M_{Oy} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{4}{5}T_B(3b) + P x_G = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_B = \frac{20}{27}P}$$



Questão 08

A figura a seguir ilustra um sistema composto por um disco homogêneo, de centro A, massa m e raio R, por uma barra esbelta e homogênea AB, de massa desprezível e comprimento L, e por um pequeno bloco B de massa m. O disco pode rolar sem escorregar sobre uma superfície plana horizontal, ao passo que o bloco pode transladar sem atrito em uma guia vertical. Os vínculos em A e B são articulações ideais. O bloco encontra-se ligado a uma mola linear ideal, de constante k, que se encontra relaxada na posição $\theta = 60°$.



Para o sistema representado, determine

a) a expressão da energia cinética do sistema para uma configuração genérica, em função de θ e $\dot{\theta}$ e dos parâmetros fornecidos no enunciado.

b) o valor máximo de k para que o sistema consiga atingir a configuração $\theta = 90°$, partindo do repouso da configuração $\theta = 60°$.

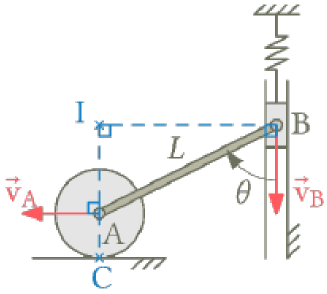
Note e adote: Para o disco, utilize $J_{\text{Az}} = mR^2/2$

Resposta da questão 08

a) Para relacionar as velocidades dos pontos A e B com a velocidade angular $\dot{\theta}$ da barra, pode-se obter o centro instantâneo de rotação da barra, ponto I, como mostrado na figura. Assim:

$$\vec{v}_A = -\dot{\theta}L\cos\theta\,\vec{\imath} \quad \text{e} \quad \vec{v}_B = -\dot{\theta}L\sin\theta\,\vec{\jmath}$$

Além disso, como o disco rola sem escorregar, seu centro instantâneo de rotação é o ponto C, de onde decorre que sua velocidade angular é $\omega = \frac{\dot{\theta}L\cos\theta}{R}$.



Assim, a energia cinética do sistema é:

$$E = \frac{1}{2}m|\vec{v}_A|^2 + \frac{1}{2}J_{Az}\omega^2 + \frac{1}{2}m|\vec{v}_B|^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{1}{2}mL^2\left(1 + \frac{1}{2}\cos^2\theta\right)\dot{\theta}^2}$$

b) Entre as configurações $\theta = 60°$ e $\theta = 90°$, realizam trabalho o peso do bloco B e a força elástica na mola linear:

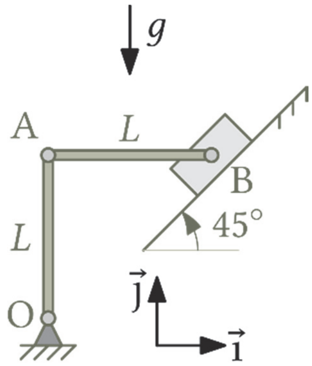
$$W = mg\left(\frac{1}{2}L\right) - \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}L - 0\right)^2 = \frac{4mgL - kL^2}{8}$$

Aplicando o Teorema da Energia Cinética:

$$W = \Delta E = E_f - E_i = E_f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4mgL - kL^2}{8} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k \leq \frac{4mg}{L}}$$

Questão 09

A figura a seguir ilustra um sistema composto por duas barras esbeltas e homogêneas OA e AB, de mesmo comprimento L, e por um bloco B. Tanto a barra OA quanto o bloco B têm massa m cada. A barra AB, por sua vez, tem inércia desprezível. Sabe-se que o sistema parte do repouso da configuração indicada e que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície plana sobre a qual está apoiado é igual a μ.



Para a configuração ilustrada, determine

a) o vetor aceleração $\vec{a}_{\mathrm{B}}$ do bloco em função da aceleração angular α da barra OA (positiva no sentido anti-horário).

b) o esforço atuante na barra AB em função de m, g e μ, indicando se é de tração ou compressão.

Note e adote:
Para a barra OA, utilize $J_{\mathrm{Oz}} = mL^2/3$

Resposta da questão 09

a) Utilizando as equações dos campos de acelerações para as barras OA e AB:

$$\vec{a}_{A} = \vec{a}_{O} + \vec{\alpha}_{OA} \wedge (A - O) - \omega_{OA}^2 (A - O) = \vec{0} + \alpha \vec{k} \wedge L\,\vec{j} - \vec{0} = -\alpha L\,\vec{i}$$

$$\vec{a}_{B} = \vec{a}_{A} + \vec{\alpha}_{AB} \wedge (B - A) - \omega_{AB}^2 (B - A) = -\alpha L\,\vec{i} + \alpha_{AB} \vec{k} \wedge L\,\vec{i} - \vec{0} = -\alpha L\,\vec{i} + \alpha_{AB} L\,\vec{j}$$

Por outro lado, como o bloco desliza sobre a superfície plana inclinada: $\vec{a}_{B} = a_{B}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$. Igualando as expressões para $\vec{a}_{B}$, obtém-se $\alpha_{AB} = -\alpha$ e, portanto:

$$\boxed{\vec{a}_{B} = -\alpha L\,\vec{i} - \alpha L\,\vec{j}}$$

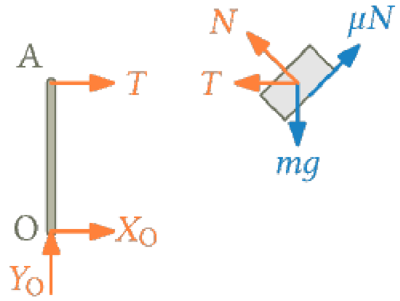
b) Aplicando o Teorema da Quantidade de Movimento Angular para a barra OA, com polo O:

$$J_{Oz}\alpha = -TL \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{3T}{mL}$$

Aplicando o Teorema da Resultante para a bloco B:

$$m(-\alpha L) \quad = -T - (1 - \mu)N\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad N = -\frac{4\sqrt{2}}{(1 - \mu)}T$$

$$m(-\alpha L) \quad = (1 + \mu)N\frac{\sqrt{2}}{2} - mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = -mg\left[3 + 4\left(\frac{1 + \mu}{1 - \mu}\right)\right]^{-1}}$$



A barra AB encontra-se, portanto, **comprimida** na configuração indicada.

RASCUNHO

NÃO SERÁ CONSIDERADO NA CORREÇÃO

RASCUNHO

NÃO SERÁ CONSIDERADO NA CORREÇÃO