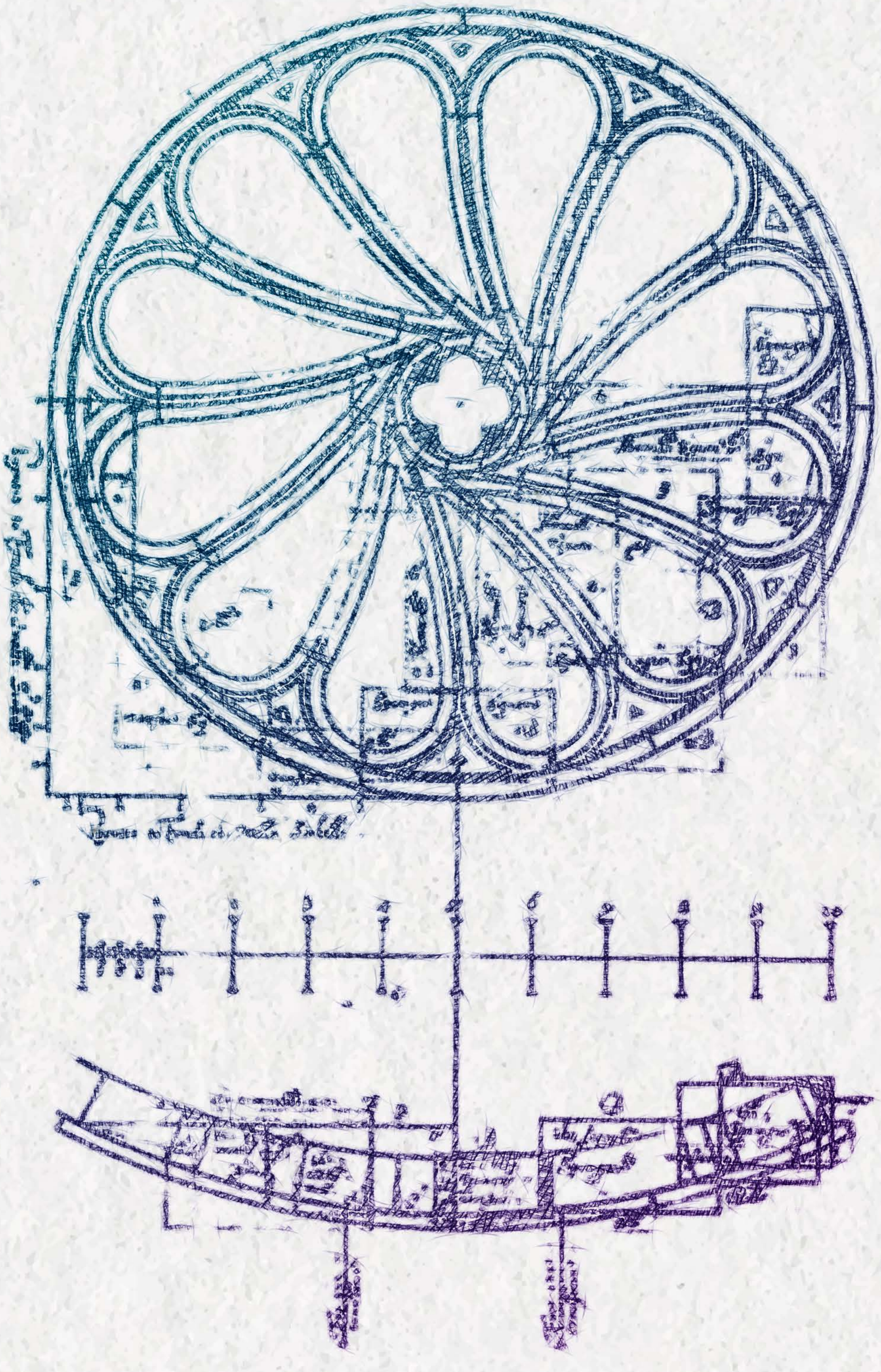


MATEMÁTICA

Homenagem visual à área de Matemática, representada por cálculos de vitrais utilizados na arquitetura.

fuVest vencerás pela educação

Matemática

Questão 01

A palavra ARARA, para além da beleza da ave e de ser um palíndromo, é comumente utilizada em exercícios de análise combinatória e probabilidade, pois é formada por cinco letras, com apenas duas letras distintas. Supondo que as letras dessa palavra estão numa urna em que a retirada de cada uma das letras é equiprovável, responda:

a) Qual a probabilidade de sortear duas letras, sem reposição, formando a palavra AR, isto é, sortear a primeira letra A e, sem a reposição, sortear a segunda letra R?
b) Qual a probabilidade de sortear 5 letras, sem reposição, e formar novamente a palavra ARARA?
c) Supondo agora que as letras colocadas na urna são coloridas, isto é, **ARARA**, qual a probabilidade de sortear novamente, sem reposição, 5 letras que formem a palavra **ARARA** com a mesma coloração inicial?

Resolução

a) Dada a equiprobabilidade, a probabilidade de sair a letra A é de $\frac{3}{5}$ e posteriormente de $\frac{2}{4}$ de sair R, ou seja, a probabilidade de sair AR é $\frac{3}{5}.\frac{1}{2}=\frac{3}{10}=30\%.$

b) Novamente dada a equiprobabilidade, temos respectivamente os seguintes valores $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{1}$. Portanto a probabilidade é $\frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{1}=\frac{1}{10}=10\%.$

c) Nesse caso, temos os seguintes valores $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{1}$ para os respectivos sorteios. Portanto, a probabilidade é $\frac{1}{5}.\frac{1}{4}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{1}=\frac{1}{120}=0{,}8333\ldots\%.$

Matemática

Questão 02

Uma rede de supermercados vende dois tipos de frascos de um determinado álcool, um com capacidade de 1 litro e outro de 2 litros. Em um certo dia do mês, um dos supermercados da rede vendeu um total de 50 frascos e, nesse dia, o valor arrecadado com as vendas desses frascos foi de R$ 320,00.

a) Se o preço do frasco de álcool de 1 litro é de R$ 6,00 e de 2 litros é de R$ 10,00, quantos frascos de cada tipo foram vendidos nesse dia?
b) Agora suponha que nesse dia o supermercado vendeu 25 frascos de 1 litro pelo valor total de R$ 125,00. Qual era o valor do frasco de 2 litros?
c) Agora imagine que a validade do frasco de 2 litros está próxima do vencimento e que o supermercado anunciou uma promoção em que o valor do frasco de 2 litros será o mesmo do frasco de 1 litro, ou seja, R$ 6,00. É possível que, ao final da promoção, o gerente venda a mesma quantidade de frascos (50 frascos) arrecadando o mesmo valor (R$ 320,00)? Se for possível, quantos frascos de cada tipo foram vendidos?

Resolução

a) Considerando X = número de frascos de 1 litro e Y = número de frascos de 2 litros temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{X} + \mathbf{Y} = 50 \\ 6{,}00\mathbf{X} + 10{,}00\mathbf{Y} = 320 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por substituição, podemos expressar $\mathbf{X}$ em função de $\mathbf{Y}$ a partir da primeira equação $\mathbf{X} = 50 - \mathbf{Y}$. Substituindo na segunda equação temos $6{,}00(50 - \mathbf{Y}) + 10{,}00\mathbf{Y} = 320$ que resulta em $300 - 6{,}00\mathbf{Y} + 10{,}00\mathbf{Y} = 320$. Logo, $\mathbf{Y} = 5$ e $\mathbf{X} = 45$. Portanto foram vendidos 45 frascos de 1 litro e 5 frascos de 2 litros.

b) Se o supermercado vender 25 frascos de 1 litro por R$125,00 temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 25 + \mathbf{Y} = 50 \\ 5 \times 25 + \mathrm{b}\mathbf{Y} = 320 \end{cases}$$

Da primeira equação temos que $\mathbf{Y} = 25$. Logo, $5 \times 25 + 25\mathrm{b} = 320 \Longrightarrow \mathrm{b} = \frac{(320-125)}{25} = 7{,}80$.
Portanto, o valor do frasco de 2 litros deve ser de R$7,80.

c) Dado que o novo valor do frasco de 2 litros é igual ao de 1 litro, ou seja, R$6,00, e o valor arrecado é de R$320,00, o novo sistema é dado por:

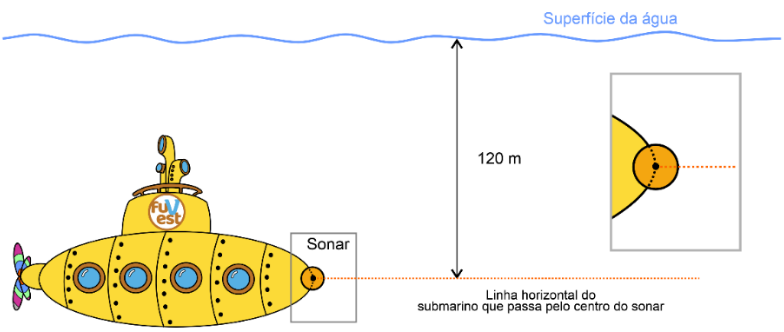
$$\begin{cases} \mathbf{X} + \mathbf{Y} = 50 \\ 6{,}00\mathbf{X} + 6{,}00\mathbf{Y} = 320 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6{,}00\mathbf{X} + 6{,}00\mathbf{Y} = 300 \\ 6{,}00\mathbf{X} + 6{,}00\mathbf{Y} = 320 \end{cases}$$

Não é possível que o gerente venda a mesma quantidade de frascos arrecadando o mesmo valor porque o sistema é impossível.

Matemática

Questão 03

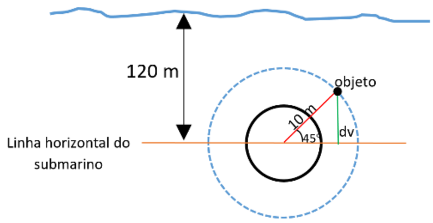
Na parte frontal do casco de um submarino está localizado um sonar esférico de raio 3 m para detectar objetos ao seu redor. O sonar emite ondas que se propagam em todas as direções, formando esferas de raio igual à distância entre o centro do sonar até a superfície do objeto detectado. O centro do sonar está a uma profundidade de 120 m em relação à superfície da água.



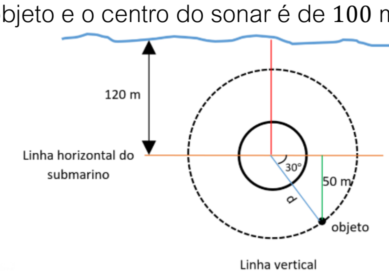
a) Qual a distância mínima do centro do sonar até a superfície do objeto para que ele seja detectado?
b) Se o sonar detecta um objeto a uma distância de 10 m do seu centro, em um ponto localizado a 45º acima da linha horizontal que passa pelo centro do sonar, qual é a profundidade do objeto em relação à superfície da água?
c) Se o sonar detecta um objeto a uma profundidade de 170 m abaixo da superfície da água e a 30° abaixo da linha horizontal, que passa pelo centro do sonar, qual é a distância do objeto até o centro do sonar?

Resolução

a) A distância mínima é o comprimento do raio do sonar, ou seja, 3 m.
b) Como o objeto está localizado a 45º acima da linha horizontal temos a situação de um triângulo retângulo. Assim, para descobrir dv, temos que $sen(45^\circ) = \frac{dv}{10}$. Logo $dv = 10 \times sen(45^\circ) = 10\frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \cong 7{,}07$ m. Dado que a distância da superfície da água até o centro é de 120 m, então a profundidade do objeto é de $120 - 7{,}07 = 112{,}93$ m.



c) Como ângulo é de 30º em relação à linha horizontal do sonar e o objeto está a uma profundidade de 170 m, ou seja, 50 m abaixo da linha horizontal que passa pelo centro do sonar, temos que $sen(30^\circ) = \frac{50}{d}$. Logo, $d = \frac{50}{sen(30^\circ)} = 100$ m. Sendo assim, a distância entre o objeto e o centro do sonar é de 100 m.



Matemática

Questão 04

"Tudo por 50% do dobro" é uma frase bem conhecida sobre ofertas enganosas, que virou meme. Isso basicamente porque um produto, após sofrer um aumento de 100%, passando a custar o dobro, precisa de um desconto de 50% para voltar ao seu valor inicial, ou seja, permanecer com o valor inalterado após o reajuste seguido do desconto. Com base nessa ideia, responda:

a) Qual seria o percentual de desconto necessário para que um produto que foi reajustado em 50% volte ao valor original?
b) Admita que um produto que custa P seja reajustado em $x\%$ e, posteriormente, com um desconto de $y\%$, volte a custar o mesmo valor P. Explicite y em função de x no modelo apresentado, isto é, exiba o desconto y em função do reajuste x.
c) Suponha que um produto tem um reajuste de $m\%$ e depois um desconto de $n\%$, voltando a custar o valor inicial. Considere que m e n são inteiros maiores que zero. Qual seria o menor valor de m para que n seja também um inteiro?

Resolução

a) Um produto com valor P, que sofre um reajuste de 50%, passa a custar 1,50P e para que volte a custar P, temos

$P = 1{,}50P(1 - y\%) \Rightarrow 1 - y\% = \frac{P}{1{,}5P} = 0{,}666\ldots \Rightarrow y\% = 0{,}333\ldots$, ou seja, $y = 33{,}33\%$.

b) Temos

$P = P(1 + x\%)(1 - y\%) = P\left(\frac{100+x}{100}\right)\left(\frac{100-y}{100}\right) \Rightarrow 10.000 = (100 + x)(100 - y)$, sendo assim

$$\frac{10000}{100 + x} = 100 - \mathrm{y} \Rightarrow y = 100 - \frac{10000}{100 + x} = \frac{100x}{100 + x}$$

c) Para este item, pode-se ou não utilizar o anterior. Sem utilizar, podemos verificar que o primeiro valor inteiro positivo de m que torna n também inteiro positivo é *25* (tornando $n = 20$).

Matemática

Questão 05

Deseja-se instalar uma luminária a uma certa altura do teto. A luminária está posicionada no vértice P de uma pirâmide regular de base quadrada que, por sua vez, está inscrita em um cubo de lado 4 m, conforme a imagem a seguir. As projeções da luminária no plano do teto e chão são representadas, respectivamente, pelos pontos R e Q, que coincidem com a intersecção das diagonais dos quadrados DCGH e ABFE.

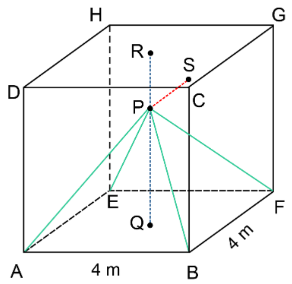
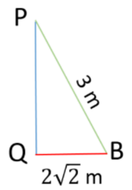


Imagem sem escala

a) Admitindo que as arestas laterais da pirâmide medem 3 m, a qual distância a luminária está do chão?
b) Supondo que as arestas laterais da pirâmide formam um ângulo de 45º com o chão, qual é o comprimento, em metros, da aresta lateral da pirâmide?
c) Considerando a projeção ortogonal do ponto P no plano do fundo do cubo, representada pelo ponto S, qual será o comprimento da projeção da aresta PF no plano EFGH, se a altura PQ for de $2\sqrt{2}$ m?

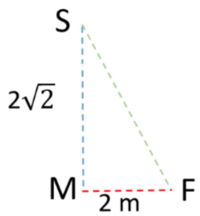
Resolução

a) Como o ponto Q é uma projeção da luminária no plano do chão temos o triângulo retângulo PQB. Além disso, o ponto Q é a intersecção das diagonais do quadrado ABEF, cuja diagonal é $d = l\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ m. Logo, QB é $2\sqrt{2}$ m. Como a aresta da pirâmide mede 3 m, aplicando Pitágoras, $3^2 = h^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2$ e, portanto, a altura PQ é 1 m.



b) A diagonal do quadrado ABEF é $d = l\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ m. Como a projeção da luminária no quadrado ABEF está na intersecção das diagonais do quadrado (ponto Q) então a distância QB é dada por $2\sqrt{2}$ m. Se o ângulo entre a aresta da pirâmide e o chão é de 45º, então o triângulo retângulo PBQ é isóscele. Logo, a altura da luminária até o chão (PQ) é de $2\sqrt{2}$ m e, portanto, aplicando Pitágoras, cada aresta mede 4 m.

c) A projeção do ponto Q no plano EFGH localiza-se no ponto médio da aresta EF. Denotando por M esse ponto médio, temos que $\mathrm{MF} =\ 2$ m. Assim, temos um triângulo retângulo SMF. Como a projeção SM é igual à altura PQ então SM=$2\sqrt{2}$ m. Aplicando Pitágoras, temos que $\mathrm{SF} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ m.



Matemática

Questão 06

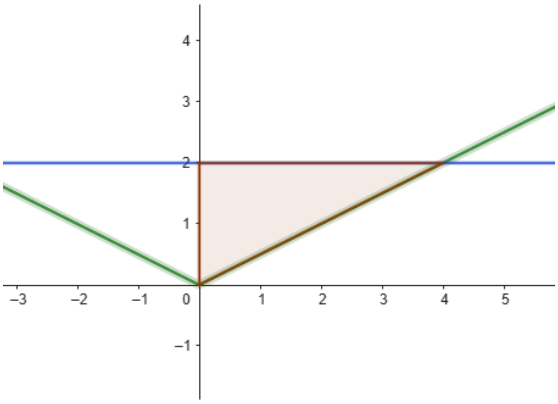
Considere a função real modular $f(x) = \frac{|x|}{d}$, onde $d > 0$.

a) Quais são os pontos de interseção entre a reta $y = 1$ e o gráfico de $f(x)$ para $d = 1$?
b) Qual a área da região obtida à direita do eixo Oy, abaixo da reta $y = 2$ e acima do gráfico de $f(x)$ para $d = 2$?
c) Qual é a área da região formada abaixo da reta $y = d$ e acima do gráfico de $f(x)$?

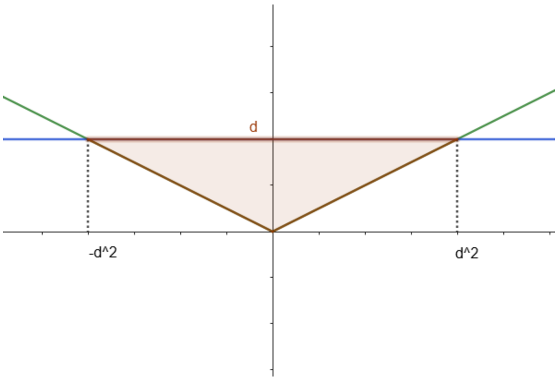
Resolução

a) $f(x) = 1 \Longrightarrow |x| = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$
Os pontos de interseção são $(1,1)$ e $(-1,1)$.

b) A área do triângulo marrom é: $A = \frac{4 \times 2}{2} = 4$



c) $\frac{|x|}{d} = d \Longrightarrow |x| = d^2 \Rightarrow x = \pm d^2$



A região marrom formada é um triângulo de base $2d^2$ e altura d. Assim, a área é $A = \frac{2d^2.d}{2} = d^3$.