

MATEMÁTICA – 1979

Não é permitido o uso de máquinas ou réguas de cálculo, tábuas de logaritmos, ou qualquer tipo de tabelas.

1. Ache a média aritmética dos números $\frac{3}{5}$, $\frac{13}{4}$ e $\frac{1}{2}$.
2. Num triângulo isósceles um ângulo A mede 100° . Qual o ângulo formado pelas alturas que não passam pelo vértice A?
3. Subtraindo-se 3 de um certo número, obtém-se o dobro da sua raiz quadrada. Qual é esse número?
4. Uma certa mercadoria é vendida nas lojas A e B, sendo Cr\$ 20,00 mais cara em B. Se a loja oferecesse um desconto de 10%, o preço nas duas lojas seria o mesmo. Qual é o preço na loja A?
5. Mostre que se m é um número ímpar então $m^2 - 1$ é divisível por 8.
6. Os números 1, 5, 8 podem ser termos de uma mesma P.G.? Justifique.
7. Sendo $a^2 + b^2 = 70ab$, calcule $\log_5 \frac{(a+b)^2}{ab}$ em função de $m = \log_5 2$ e $n = \log_5 3$.
8. Ache os valores reais de x de modo que a parte real do número complexo $z = \frac{x-i}{x+i}$ seja negativa (i é a unidade imaginária).
9. Ache m de modo que o sistema

$$\begin{cases} \cos x + m \sin x = 0 \\ \cos x - m \sin x = 1 \end{cases}$$
 na incógnita x, tenha solução.
10. Uma escada de 25 dm de comprimento se apóia num muro do qual seu pé dista 7 dm. Se o pé da escada se afastar mais 8 dm do muro, qual o deslocamento verificado pela extremidade superior da escada?
11. O polinômio $p(x) = x^3 - x^2 + x + a$ é divisível por $x - 1$. Ache todas as raízes complexas de $p(x)$.
12. Num triângulo isósceles, de área $3\sqrt{6}$, a altura relativa à base é o triplo do diâmetro da circunferência inscrita. Ache o raio dessa circunferência.
13. Determine a e b de modo que sejam equivalentes os sistemas

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 1 \end{cases}$$
14. Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se interceptam num ponto P e são cordas perpendiculares de um mesmo círculo. Se $AP = CP = 2$ e $PB = 6$, ache o raio do círculo.
15. No triângulo retângulo ABC, os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem $2 + \sqrt{3}$ e 1, respectivamente. Seja D um ponto de $\overline{AB}$ tal que $AD = AC$. Calcule $\text{tg}(\alpha + \beta)$, onde α e β são, respectivamente, as medidas de $\widehat{ADC}$ e $\widehat{ABC}$.
16. Por um ponto P do semi-eixo positivo dos x traçam-se as tangentes ao círculo de equação $x^2 + y^2 = 3$. O quadrilátero cujos vértices são P, o centro do círculo, e os dois pontos de tangência, tem área $\sqrt{3}$. Ache as equações dessas tangentes.
17. São dados um plano π , um ponto P do mesmo, e uma reta r oblíqua a π que o fura num ponto distinto de P. Mostre que existe uma única reta por P, contida em π , e ortogonal a r.
18. As projeções ortogonais do ponto $P = (1, 2)$ sobre as retas suportes dos lados do triângulo ABC estão alinhadas. Sendo $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$ e $C = (0, a)$, determine a.
19. Considere os números obtidos do número 12345 efetuando-se todas as permutações de seus algarismos. Colocando esses números em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43521?
20. Num cubo de aresta a um ponto P se situa numa das arestas e dista $a/4$ de um dos vértices. Qual a distância de P à superfície esférica inscrita no cubo?