

**Josenilton
Andrade de
Franca**

Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP (IME) em 1996. Bacharel em Matemática com Ênfase em Processamento de Dados pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Santo André em 1990. Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da USP. Conselheiro do Conselho Municipal de Educação de Diadema. Leciona Matemática para o Ensino Fundamental e Médio há 9 anos, em escolas públicas e particulares. Cursa disciplinas do mestrado como aluno especial na área de telemática e ensino.

Avaliação da Prova de Matemática - Segunda Fase

A prova de matemática da Fuvest/99 foi adequada para os objetivos pretendidos, isto é, selecionar os candidatos mais bem preparados. Tanto o trabalho algébrico quanto as representações geométricas foram contemplados de forma equilibrada.

Senti falta de situações-problema que exijam mais um raciocínio lógico-dedutivo que a memorização de informações muito específicas. No entanto, a prova exigiu apenas memorização das informações mais comuns à maioria dos cursos de matemática do ensino médio.

Praticamente todas as questões da prova privilegiaram o conhecimento, isto é, exigiram dos alunos domínio dos principais tópicos do programa de matemática. Contudo, em nenhuma delas isso era condição suficiente para que o aluno obtivesse sucesso. Apenas nas questões 2 e 3 essa característica foi menos acentuada. A questão 2 exigiu capacidade de dedução e raciocínio lógico de forma decisiva, enquanto que a questão 3 solicitou uma análise das informações apresentadas e de como elas se relacionavam.

Tivemos questões em que um determinado conteúdo se destacava, tratado de modo mais profundo em alguns casos, como nas questões 1 (trigonometria), 5 (sistemas lineares), 8 (geometria espacial) e de maneira mais simples em outros, como nas questões 9 (progressão geométrica) e 10 (geometria plana/construção com régua e compasso). O restante das questões exigiu que o candidato relacionasse diversos conteúdos. Nestas questões, era fundamental que, além do conhecimento com compreensão de cada um dos tópicos, o aluno fosse capaz de analisá-las com muita atenção, a fim de definir como aplicar e como relacionar tais tópicos, identificando as informações fornecidas, as solicitações de cada questão e a melhor maneira de organizar essas informações para tirar conclusões válidas.

Essa maneira de elaborar uma prova merece um comentário. O fato de se colocar questões que relacionam diversos tópicos pode ser encarado de duas maneiras. A primeira delas, mais comum, é justificada como sendo uma maneira de o aluno demonstrar compreensão pelo assunto e capacidade de análise e síntese, isto é, como ele organiza os dados do problema, como os relaciona e que conclusões tira de tal análise. Outra forma, pouco comentada, é a tentativa de se trabalhar um maior número de tópicos dentro de um limite de 10 questões. Essa segunda maneira é um tanto perigosa, pois acaba relacionando alguns assuntos de forma extremamente artificial. Não é o caso dessa prova, na qual os conteúdos presentes numa questão apareciam de forma natural. São dessa forma, por exemplo, a questão 7, que relaciona geometria plana, trigonometria e o conceito de área e a questão 6 que trabalha o conceito de função e as propriedades dos logaritmos.

De modo geral, o conjunto de questões abrangeu os principais conteúdos do programa oficial de matemática, no ensino médio. Alguns tópicos tradicionais e importantes não

estiveram presentes, como análise combinatória e probabilidade. Esses conteúdos poderiam ser contemplados pelo menos com uma questão, por exemplo, no lugar da questão 9 (progressão geométrica), a meu ver dispensável no conjunto das questões. As funções tiveram uma presença discreta e seria desejável ao menos uma questão envolvendo alguma aplicação prática desse tema, uma vez que tal conteúdo é fundamental em muitas áreas que necessitam do instrumental matemático.

Também não compareceram questões relacionadas a números complexos, o que entendendo estar correto, visto o nível mais abstrato desse conteúdo e as poucas aplicações no ensino médio. Em muitas escolas tal conteúdo quase não é ensinado. Mesmo na Proposta Curricular para o Ensino de Matemática no Ensino Médio, o desenvolvimento desse tópico é desencorajado.

Itens como equações polinomiais tiveram tratamento adequado, diluído de forma discreta em algumas questões, exigindo apenas um conhecimento suficiente para resolver partes de certas questões.

Nos últimos vestibulares da Fuvest a geometria teve um papel de destaque. A geometria plana, nesta prova, apareceu mais relacionada com outros tópicos. Exceção feita à questão 10, que abordou a geometria sem ligá-la à álgebra. Uma grata surpresa, principalmente por solicitar uso dos instrumentos de desenho e as justificativas das construções realizadas. A forma como essa prova foi estruturada demonstra que os professores que querem preparar seus alunos de forma adequada devem procurar relacionar em algum momento os diversos conteúdos desenvolvidos, ao invés de tratá-los de forma independente. Também seria desejável, sempre que possível, um certo aprofundamento de alguns temas, ainda que seja apenas para os alunos com maior interesse.

O nível de dificuldade foi adequado e de acordo com o que se trabalha nas melhores escolas. Contudo, poucos alunos atingem o grau de amadurecimento e compreensão exigidos em algumas questões. Na maioria das escolas públicas, questões como algumas das exploradas nessa prova só são trabalhadas a título de aprofundamento, com resultados pouco satisfatórios.

Muito boa a estratégia de organizar os tópicos de forma dependente, com dificuldade crescente. Isto permite que o candidato não tão bem preparado consiga desenvolver raciocínios satisfatórios até um certo limite, bem como ajuda candidatos melhor preparados a formular suas estratégias de resolução de modo escalonado.

Os enunciados das questões estavam claros, precisos e objetivos. Nota-se a preocupação da banca examinadora em não exagerar na simbologia matemática, desnecessária nesse tipo de prova e que, às vezes, tira a chance de candidatos mais criativos apresentarem soluções corretas, apenas por não compreenderem, ignorarem ou não estarem familiarizados com algum símbolo.

Questão
01

Ache todas as soluções da equação

$$\operatorname{sen}^3 x \cos x - 3 \operatorname{sen} x \cos^3 x = 0$$

no intervalo $[0, 2\pi)$.

RESPOSTA

IA (x 100)		
	C	M
H	27	39
B	51	63
E	42	57
TODOS	46	59

ID		
	C	M
H	0,55	0,58
B	0,67	0,65
E	0,66	0,65
TODOS	0,71	0,66

Fatorando $\operatorname{sen} x \cos x$, a equação dada é equivalente a $\operatorname{sen} x \cos x (\operatorname{sen}^2 x - 3 \cos^2 x) = 0$

e portanto, o conjunto de suas soluções é constituído pela reunião das soluções das equações

(I) $\operatorname{sen} x = 0$

(II) $\cos x = 0$

(III) $\operatorname{sen}^2 x - 3 \cos^2 x = 0$

As soluções da equação (I) são da forma $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

As soluções da equação (II) são da forma $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$.

Quanto a equação (III), lembrando que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, obtemos $\operatorname{sen}^2 x = 3 \cos^2 x$ e portanto

$$4 \cos^2 x = 1.$$

Essa última equação é equivalente a $\cos x = \pm \frac{1}{2}$, cujas soluções são $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2m\pi$ e $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2p\pi$ com $m, p \in \mathbb{Z}$.

Lembrando que as soluções procuradas da equação original pertencem ao intervalo $[0, 2\pi)$ e atribuindo valores inteiros para k, n, m e p , obtemos

$$S = \left\{ 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

para o conjunto das soluções da equação proposta.

Um jogo eletrônico funciona da seguinte maneira: no início de uma série de partidas, a máquina atribui ao jogador P pontos; em cada partida, o jogador ganha ou perde a metade dos pontos que tem no início da partida.

Questão
02

- a) Se uma pessoa jogar uma série de duas partidas nas quais ela ganha uma e perde outra, quantos pontos terá ao final?
- b) Se uma pessoa jogar uma série de quatro partidas nas quais ela perde duas vezes e ganha duas vezes, quantos pontos terá ao final?
- c) Se uma pessoa jogar uma série de sete partidas, qual o menor número de vitórias que ela precisará obter para terminar com mais que P pontos?

	IA (x 100)	
	C	M
H	42	54
B	60	66
E	57	64
TODOS	58	64

RESPOSTA

	ID	
	C	M
H	0,44	0,28
B	0,36	0,39
E	0,38	0,32
TODOS	0,41	0,38

a) Ao ganhar, o jogador passa a ter $P + \frac{P}{2}$ pontos; quando perde, passa a ter $(P + \frac{P}{2}) - \frac{1}{2}(P + \frac{P}{2})$.
Ao final, ele terá, portanto $(P + \frac{P}{2})(1 - \frac{1}{2}) = P(1 + \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}P$.

b) A cada partida que ganha o jogador passa a ter $(+\frac{1}{2})$ vezes a quantidade de pontos que tinha no início daquela partida; a cada partida que perde, o jogador passa a ter $(-\frac{1}{2})$ vezes a quantidade de pontos que tinha no início daquela partida. Portanto, se ganhar g vezes e perder p vezes durante uma série de $(g+p)$ partidas ele terá $P(+\frac{1}{2})^g(-\frac{1}{2})^p$ pontos. Tomando $g = 2$ e $p = 2$, obtemos

$$P\left(+\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = P\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}P$$

Portanto, o jogador terá $\frac{9}{16}P$ ao final de uma série de 4 partidas, onde ganha 2 vezes e perde 2 vezes.

c) Seja n o número de vitórias em 7 partidas. Então, a quantidade de pontos do jogador é

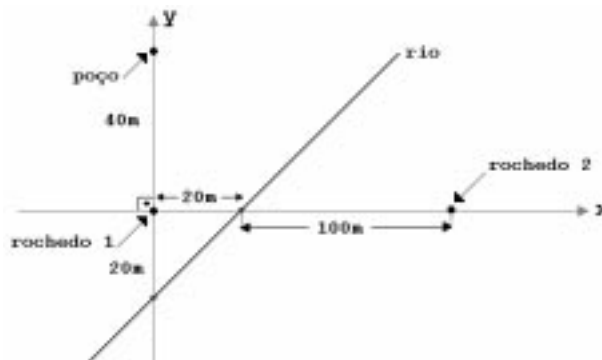
$$P_n = P\left(+\frac{1}{2}\right)^n\left(1-\frac{1}{2}\right)^{7-n}, \text{ isto é, } P_n = P\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{7-n}$$

Como queremos $P_n \geq P$, devemos ter $\frac{3^n}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{7-n}} \geq 1$, isto é, $3^n \geq 2^7$.

Como $2^7 = 128$, $3^4 = 81$ e $3^5 = 243$, o menor valor de n será $n = 5$.

Questão 03

Um pirata enterrou um tesouro numa ilha e deixou um mapa com as seguintes indicações: o tesouro está enterrado num ponto da linha reta entre os dois rochedos; está a mais de 50 m do poço e a menos de 20 m do rio (cujo leito é reto).



	IA (x 100)	
	C	M
H	18	28
B	39	49
E	30	42
TODOS	35	45

- a) Descreva, usando equações e inequações, as indicações deixadas pelo pirata, utilizando para isto o sistema de coordenadas mostrado na figura.
- b) Determine o menor intervalo ao qual pertence a coordenada x do ponto $(x,0)$ onde o tesouro está enterrado.

	ID	
	C	M
H	0,32	0,31
B	0,49	0,57
E	0,46	0,54
TODOS	0,53	0,55

RESPOSTA

Com base no sistema de coordenadas que acompanha o enunciado da questão, identificamos imediatamente as coordenadas dos dois rochedos R_1 e R_2 e do poço P: $R_1 = (0,0)$, $R_2 = (120,0)$ e $P = (0,40)$. A linha reta que une os dois rochedos é descrita pela reta de equação $y = 0$ e o leito do rio é descrito pela reta que passa pelos pontos $(20,0)$ e $(0,-20)$, isto é, pela reta $r: y = x - 20$.

- a) Seja $T = (\bar{x}, \bar{y})$ o ponto onde se encontra enterrado o tesouro. Com base nas considerações acima e nas descrições do pirata, as coordenadas \bar{x} e \bar{y} de T devem satisfazer as seguintes condições:
- (i) $\bar{y} = 0$ (T pertence à linha reta entre os dois rochedos)
 - (ii) $0 \leq \bar{x} \leq 100$ (T está entre os 2 rochedos)
 - (iii) $\bar{x}^2 + 40^2 \geq 50^2$ (a distância de T ao poço é maior ou igual que 50 m)
 - (iv) $\frac{|\bar{x} - \bar{y} - 20|}{\sqrt{2}} \leq 20$ (a distância de T ao rio é menor ou igual a 20m)
- b) As condições (ii) e (iii) implicam $\bar{x} \geq \sqrt{2500-1600}$ e $\bar{x} \leq 100$, isto é, $30 \leq \bar{x} \leq 100$.

As condições (i) e (iv) implicam $|\bar{x} - 20| \leq 20\sqrt{2}$ e portanto, $20(1-\sqrt{2}) \leq \bar{x} \leq 20(1+\sqrt{2})$.

Como $20(1-\sqrt{2}) < 30$, as condições acima estarão satisfeitas apenas se $30 \leq \bar{x} \leq 20(1+\sqrt{2})$.

Logo, o tesouro está enterrado num ponto $T = (\bar{x}, 0)$, com $30 \leq \bar{x} \leq 20(1+\sqrt{2})$.

Questão
04

A reta r tem equação $2x + y = 3$ e intercepta o eixo x no ponto A . A reta s passa pelo ponto $P = (1,2)$ e é perpendicular a r . Sendo B e C os pontos onde s intercepta o eixo x e a reta r , respectivamente,

- a) Determine a equação de s .
- b) Calcule a área do triângulo ABC .

RESPOSTA

- a) Como o coeficiente angular de r é igual a -2 e s é perpendicular a r , então seu coeficiente angular é $\frac{1}{2}$ e portanto, s tem equação $s: y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$ ou $s: y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.
- b) Para obtermos as coordenadas de A e B , fazemos $y = 0$ nas equações de r e s , respectivamente.
Resulta $A = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$ e $B = (-3, 0)$.

Como $\{C\} = r \cap s$, para determinarmos as coordenadas de C , resolvemos o sistema

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

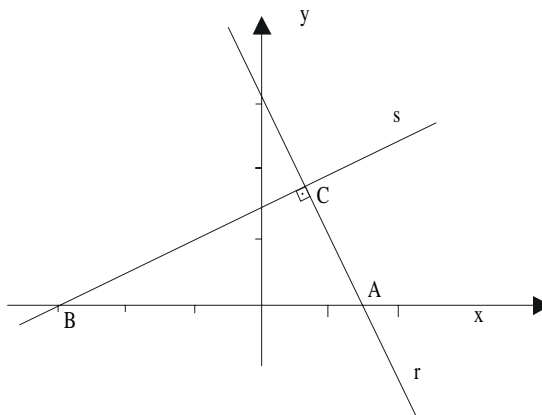
Temos $-2x + 3 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$$\frac{-5x}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$x = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{-6}{5} + 3 = \frac{9}{5}$$

Portanto $C = \left(\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right)$



Como ABC é um triângulo retângulo de base $b = AB = \frac{3}{2} - (-3)$ e altura $h = \frac{9}{5}$, sua área é

$$A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{5} = \frac{81}{20}$$

	IA (x 100)	
	C	M
H	31	49
B	63	74
E	54	72
TODOS	57	71

	ID	
	C	M
H	0,65	0,70
B	0,72	0,63
E	0,72	0,57
TODOS	0,78	0,65

Questão
05

Considere o sistema linear nas incógnitas x, y, z, w :

$$\begin{cases} 2x + my = -2 \\ x + y = -1 \\ y + (m-1)z + 2w = 2 \\ z - w = 1 \end{cases}$$

- a) Para que valores de m , o sistema tem uma única solução?
 b) Para que valores de m , o sistema não tem solução?
 c) Para $m = 2$, calcule o valor de $2x + y - z - 2w$.

	IA (x 100)	
	C	M
H	9	13
B	21	29
E	17	24
TODOS	19	26

RESPOSTA

Considerando as 2 primeiras equações, obtemos $x = \frac{-2-my}{2}$ e $x = -1 - y$ e, portanto, $-2 - my = -2 - 2y$, isto é, $(2-m)y = 0$, o que implica $y = 0$ ou $m = 2$.

Se $m \neq 2$, então $y = 0$ e $x = -1$ são as soluções das 2 primeiras equações e o sistema se reduz a

$$\begin{cases} (m-1)z + 2w = 2 \\ z - w = 1 \end{cases}$$

Multiplicando a última equação por 2 e somando com a primeira obtemos

$$(m-1)z + 2z = 4$$

$$\text{isto é, } (m+1)z = 4 \quad (*)$$

Essa última relação mostra que se $m \neq 2$ e $m \neq -1$, então o sistema é possível e determinado e sua única solução é $x = -1, y = 0, z = \frac{4}{m+1}$ e $w = \frac{3-m}{m+1}$. Por outro lado, se $m = -1$, a relação (*) conduz a uma contradição, o que significa que o sistema dado é incompatível e, portanto, não tem solução.

Finalmente, se $m = 2$, as duas primeiras equações do sistema original são equivalentes e, nesse caso, o sistema se reduz a

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ y + z + 2w = 2 \\ z - w = 1 \end{cases}$$

que é um sistema indeterminado, cuja solução geral é dada por $x = t, y = -1 - t, z = \frac{5+t}{3}$ e

$w = \frac{t+2}{3}$, com $t \in \mathbb{R}$. Em particular,

$$\begin{aligned} 2x + y - z - 2w &= 2t - 1 - t - \frac{5+t}{3} - \frac{2(t+2)}{3} \\ &= t - 1 - \frac{5+t+2t+4}{3} = t - 1 - t - 3 \\ &= -4 \end{aligned}$$

	ID	
	C	M
H	0,15	0,16
B	0,36	0,47
E	0,26	0,35
TODOS	0,35	0,42

Considere a função $f(x) = 2 \log_a(x^2 + 1) - 4 \log_a x$, com $a > 1$, definida para $x > 0$.

- a) Determine $g(x)$ tal que $f(x) = \log_a g(x)$, onde g é um quociente de dois polinômios.
- b) Calcule o valor de $f(x)$ para $x = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$

Questão
06

RESPOSTA

a) Usando as propriedades da função logaritmo na base a , temos

$$f(x) = \log_a(x^2+1)^2 - \log_a x^4 = \log_a \frac{(x^2+1)^2}{x^4}$$

Podemos, portanto, tomar $g(x) = \frac{(x^2+1)^2}{x^4}$

b) Para $x = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$, temos $g(x) = \frac{\left(\frac{1}{a^2-1} + 1\right)^2}{\frac{1}{(a^2-1)^2}} = \frac{(-a^2)^2 \cdot (a^2-1)^2}{(a^2-1)^2 \cdot 1} = a^4$

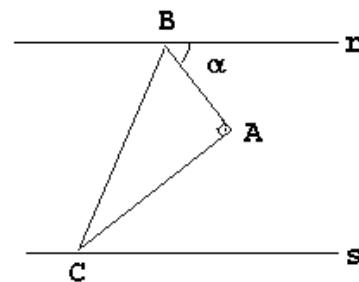
e portanto, $f(x) = \log_a a^4 = 4 \log_a a = 4$

IA (x 100)		
	C	M
H	26	41
B	53	65
E	43	59
TODOS	48	61

ID		
	C	M
H	0,58	0,64
B	0,74	0,68
E	0,69	0,64
TODOS	0,77	0,69

Questão
07

As retas r e s são paralelas e A é um ponto entre elas que dista 1 de r e 2 de s . Considere um ângulo reto, de vértice em A , cujos lados interceptam r e s nos pontos B e C , respectivamente. O ângulo agudo entre o segmento AB e a reta r mede α .



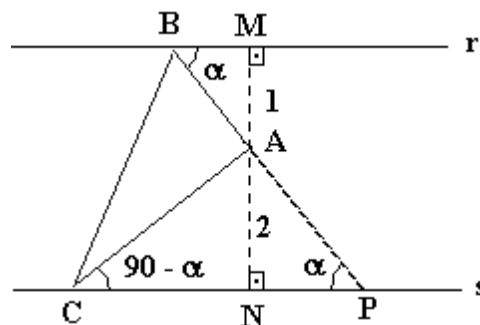
- a) Calcule a área do triângulo ABC em função do ângulo α .
- b) Para que valor de α a área do triângulo ABC é mínima?

IA (x 100)		
	C	M
H	16	26
B	42	54
E	26	36
TODOS	35	48

ID		
	C	M
H	0,39	0,52
B	0,72	0,77
E	0,56	0,66
TODOS	0,72	0,76

RESPOSTA

- a) Prolongando-se a reta que contém o segmento AB , determinamos o ponto P na reta s . Como r e s são paralelas e BP é transversal, temos $\angle APC = \alpha$, de modo que $\angle ACP = 90^\circ - \alpha$. Agora, pelo ponto A tomamos a perpendicular a r e a s , determinando os pontos M e N , respectivamente, em r e s .



Como ABM e ACN são triângulos retângulos, temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{1}{AB} \quad \text{e} \quad \text{sen}(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{AC}$$

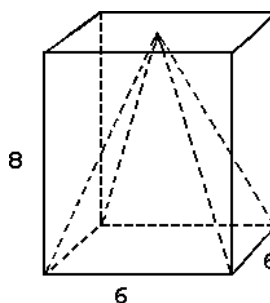
Destas relações seguem-se $AB = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$ e $AC = \frac{2}{\text{sen}(90^\circ - \alpha)} = \frac{2}{\text{cos } \alpha}$ e, portanto,

a área do triângulo ABC é dada por

$$A = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\text{sen } \alpha} \cdot \frac{2}{\text{cos } \alpha} = \frac{1}{\text{sen } 2\alpha}$$

- b) A área do triângulo ABC será mínima quando $\text{sen } 2\alpha$ for máximo, isto é, quando $\text{sen } 2\alpha = 1$. Como α é agudo, isso implica $2\alpha = 90^\circ$ e, portanto, o triângulo ABC terá área mínima quando $\alpha = 45^\circ$.

Considere uma caixa sem tampa com a forma de um paralelepípedo reto de altura 8 m e base quadrada de lado 6 m. Apoiada na base, encontra-se uma pirâmide sólida reta de altura 8 m e base quadrada com lado 6 m. O espaço interior à caixa e exterior à pirâmide é preenchido com água, até uma altura h , a partir da base ($h \leq 8$). Determine o volume da água para um valor arbitrário de h , $0 \leq h \leq 8$.



Questão
08

RESPOSTA

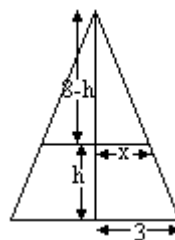
Seja $V = V(h)$ o volume ocupado pela água quando está à altura h da base. Então, $V(h)$ é a diferença entre os volumes do paralelepípedo de base quadrada e altura h e o de um tronco de pirâmide:

$$V(h) = 6 \times 6 \times h - V_{\text{Tronco}} = 36h - V_{\text{Tronco}}.$$

Para determinarmos o volume do tronco, tomamos um corte transversal por um plano passando pelo vértice da pirâmide e perpendicular à base: como os triângulos envolvidos são semelhantes, pelo teorema de Tales, obtemos

$$\frac{8-h}{x} = \frac{8}{3}$$

donde $x = \frac{3}{8}(8-h)$



Assim o volume do tronco é dado por

$$\begin{aligned} V_{\text{Tronco}} &= \frac{1}{3} \times 36 \times 8 - \frac{1}{3} (2x)^2 (8-h) \\ &= 96 - \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^2 (8-h)^3 = 96 - \frac{3}{16} (8-h)^3 \end{aligned}$$

Logo, $V(h)$ é dado por

$$V(h) = 36h - 96 + \frac{3}{16}(8-h)^3$$

IA (x 100)		
	C	M
H	16	22
B	29	38
E	21	27
TODOS	26	34

ID		
	C	M
H	0,21	0,20
B	0,36	0,48
E	0,24	0,29
TODOS	0,36	0,43

Questão
09

Seja (a_n) uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão q^2 , onde q é um número inteiro maior que 1. Seja (b_n) uma progressão geométrica cuja razão é q . Sabe-se que $a_{11} = b_{17}$. Neste caso:

- Determine o primeiro termo b_1 em função de q .
- Existe algum valor de n para o qual $a_n = b_n$?
- Que condição n e m devem satisfazer para que $a_n = b_m$?

IA (x 100)		
	C	M
H	28	44
B	59	71
E	50	66
TODOS	54	67

ID		
	C	M
H	0,65	0,65
B	0,69	0,60
E	0,73	0,58
TODOS	0,77	0,63

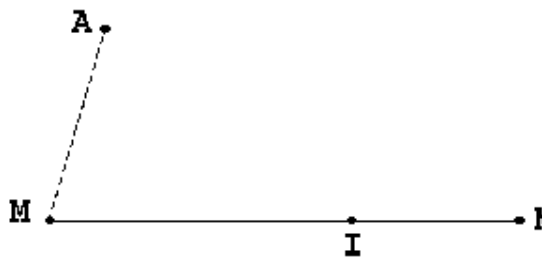
RESPOSTA

Temos:
$$\begin{cases} a_n = (q^2)^{n-1} = q^{2(n-1)} \\ b_n = b_1 q^{n-1} \end{cases} \text{ para todo } n \geq 1.$$

- Se $a_{11} = b_{17}$, então $q^{20} = b_1 q^{16}$ e portanto $b_1 = q^4$.
- Segue-se de a) que $b_n = q^{n+3}$, para todo $n \geq 1$.
Se $a_n = b_n$, então $2n-2 = n+3$ e portanto $n = 5$
- Para que $a_n = b_m$, devemos ter $2n-2 = m+3$ e, portanto, $m = 2n-5$.

Questão
10

a) Construa, com régua e compasso, um trapézio $ABCD$, onde \overline{AB} seja paralelo a \overline{CD} , conhecendo-se os pontos A, M, N e I , que satisfaçam as seguintes condições: M é o ponto médio do lado \overline{AD} , N é o ponto médio de \overline{BC} e I é o ponto de intersecção do segmento \overline{MN} com a reta que passa por B e é paralela a \overline{AD} .



b) Descreva e justifique a construção feita.

RESPOSTA

Descrição

1º) Na semi-reta \overrightarrow{AM} determinamos D tal que $AM = MD$.

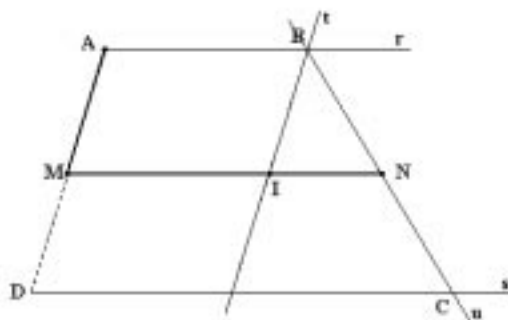
2º) Pelo ponto A , traça-se a reta r paralela a \overline{MN} .

3º) Pelo ponto D , traça-se a reta s paralela a \overline{MN} .

4º) pelo ponto I , traça-se a reta t paralela a \overline{AM} determinando com r o ponto $B : \{B\} = r \cap t$.

5º) Tomando a reta u que passa por B e N , obtemos o ponto C na reta $s : \{C\} = s \cap u$.

Fica, desta forma, construído o trapézio $ABCD$



		IA (x 100)	
		C	M
H		28	36
B		47	54
E		38	45
TODOS		43	51

		ID	
		C	M
H		0,35	0,23
B		0,47	0,50
E		0,41	0,37
TODOS		0,48	0,47